Soluzioni degli esercizi

Esercizi capitolo 13 - Logica

1.

Scrivi la tavola di verità di $A \vee \neg B$

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

2.

Crea le tavole di verità e dimostra la proprietà associativa degli operatori $\wedge$ e $\vee$

A	B	C	$A \wedge B$	B $\wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

3.

Qual è il valore di $\neg A \wedge B \implies B$ se A è `Vero`?

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$\neg A \wedge B \implies B$
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

4.

Se A, B, C sono falsi qual è il valore di $A \wedge B \vee \neg C \iff \neg B$

A	B	C	$\neg C$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \wedge B \vee \neg C$	$A \wedge B \vee \neg C \iff \neg B$
0	0	0	1	1	0	1	1

5.

Una tautologia è vera per qualsiasi valore di verità degli elementi che la compongono; verifica che la seguente funzione booleana è un tautologia logica: $\neg(A \wedge \neg A)$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
0	1	0	1
1	0	0	1

6.

Rappresenta F come espressione booleana mediante *somma di prodotti* e come *prodotto di somme*, data la seguente tabella di verità:

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\rightarrow SP$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\rightarrow SP$
1	0	1	1	$\rightarrow SP$
1	1	0	1	$\rightarrow SP$
1	1	1	1	$\rightarrow SP$

Somma di prodotti

La forma canonica **Somma di Prodotti** (SP) si ottiene considerando le righe con uscita a *1*. Ciascuna riga corrisponde a un prodotto di tutte le variabili, che vanno prese in forma affermata o negata, a seconda che nella riga siano a *1* o *0*, rispettivamente. Se il valore dell'input A vale `1` in una certa riga, allora nella forma SP prendiamo A, altrimenti prendiamo $\neg A$.

La domanda di *principio* che ci poniamo è la seguente: "*Quali input rendono F vera*"?

$$F(A,B,C) := (\neg A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot \neg B \cdot \neg C) + (A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot B \cdot \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$$

Prodotto di somme

La forma canonica **Prodotto di Somme** (PS) si ottiene invece considerando le righe con uscita a `0`. Ciascuna riga corrisponde a una somma di tutte le variabili, che vanno prese in forma affermata o negata, a seconda che nella riga siano a *0* o *1*, rispettivamente. Se il valore dell'input A vale `0` in una certa riga, allora nella forma PS prendiamo A, altrimenti prendiamo $\neg A$.

La domanda di *principio* è questa: "Quali input rendono F falsa"? Questi input vanno negati.

A	B	C	F	$\neg F$	
0	0	0	0	1	$\rightarrow PS$
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	$\rightarrow PS$
0	1	1	0	1	$\rightarrow PS$
1	0	0	1	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	

$$F(A,B,C) := (A + B + C) \cdot (A + \neg B + C) \cdot (A + \neg B + \neg C)$$

L'espressione ottenuta dalla somma di prodotti:

$$F(A,B,C) := (\neg A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot \neg B \cdot \neg C) + (A \cdot \neg B \cdot C) + (A \cdot B \cdot \neg C) + (A \cdot B \cdot C)$$

Può essere semplificata in

$$F(A,B,C) := (\neg A \cdot \neg B \cdot C) + A$$

che però non risulta più in forma normale

7.

Formalizza come logica delle proposizioni la seguente affermazione: «*L'esame è superato se la prova ha dato risultato positivo e non è stata copiata*»

Definiamo le proposizioni:
S: ”L'esame è superato”
P: ”La prova ha dato esito positivo”
C: ”La prova è stata copiata”

$$S \implies P \wedge \neg C$$

8.

Rappresenta come logica dei predicati la seguente affermazione: «*Nessuno studente supera l'esame di programmazione se non conosce il linguaggio Python*»

x è uno studente
$S(x)$: “x supera l'esame di programmazione”
$C(x)$: “x conosce il linguaggio Python”

$$\forall x(\neg C(x) \implies \neg S(x))$$

9.

Rappresenta come logica dei predicati la seguente affermazione: «*Tutti gli studenti che si esercitano ottengono migliori risultati*»; in ogni caso suggeriamo agli studenti di esercitarsi, ma cosa possiamo dire di uno studente che non si esercita?
x è uno studente
$E(x)$: “x si esercita”
$R(x)$: “x ottiene migliori risultati”

$$\forall x(E(x) \implies R(x))$$

$E(x)$ è condizione sufficiente ma non necessaria per $R(x)$ quindi uno studente x potrebbe ottenere migliori risultati anche non esercitandosi.

10.

Applicando il principio di induzione, dimostra che $2^{(n-1)} \leq n!$ per $n \geq 1$

Dimostriamo che l'espressione è vera per $n = 1$:

$2^{(1-1)} \leq 1!$
$\rightarrow 2^0 \leq 1!$
$\rightarrow 1 \leq 1$

Supponiamo sia vera per n:

$2^{(n-1)} \leq n!$

Dimostriamo che è vera per $n + 1$:

$2^{(n+1-1)} \leq (n+1)!$

che possiamo scrivere come:

$2 \cdot 2^{(n-1)} \leq (n+1) \cdot n!$

dove

$2^{(n-1)} \leq n!$ per ipotesi

e

$2 \leq n + 1$ per $n \geq 1$